EE2 - Solucion de un examen del ciclo 2024-2

Calculo I (Universidad de Lima)

Escanea para abrir en Studocu

Studocu no está patrocinado ni avalado por ningún colegio o universidad.
Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

UNIVERSIDAD DE LIMA

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ASIGNATURA: CÁLCULO I
CICLO: 2024-2
TIEMPO: 90 minutos

UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN ESCRITO 2

1. Dada la función

$$f(x)=16\left(\frac{3x^2-2}{5x+4}\right)^3-(x^3+2)\left(\sqrt[4]{5x^2+x+1}\right)$$

a) (4 puntos) Utilice las reglas de derivación para hallar $f'(x)$.
b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x=0$.

Solución:

a)

$$f'(x)=\left[16\left(\frac{3x^2-2}{5x+4}\right)^3\right]'-\left[(x^3+2)\left((5x^2+x+1)^{\frac{1}{4}}\right)\right]'$$

$$¿\,48\left(\frac{3x^2-2}{5x+4}\right)^2\left(\frac{3x^2-2}{5x+4}\right)'$$

$$-\left[(x^3+2)'(5x^2+x+1)^{\frac{1}{4}}+(x^3+2)\left[(5x^2+x+1)^{\frac{1}{4}}\right]'\right]$$

$$¿\,48\left(\frac{3x^2-2}{5x+4}\right)^2\left[\frac{(6x)(5x+4)-(3x^2-2)(5)}{(5x+4)^2}\right]$$

$$-\left[(3x^2)(5x^2+x+1)^{\frac{1}{4}}+(x^3+2)\left[\frac{1}{4}(5x^2+x+1)^{\frac{-3}{4}}(10x+1)\right]\right]$$

b) Para $x=0$, tenemos que:

$$f(0)=16\left(\frac{-1}{2}\right)^3-(2)(1)=-4\rightarrow f(0)=-4$$

y

$$f'(0)=48\left(\frac{-1}{2}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)=7\rightarrow f'(0)=7$$

Así, el punto de paso es $P(0;-4)$ y la pendiente $m_T=7$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es $L_T: y+4=7(x-0)$

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

2. El número de árboles de cierta comunidad t años después de su fundación está dada por

$$A(t)=16\left(\sqrt{\frac{3t^2-38t+170}{4t^2-50t+186}}\right) cientos\ de\ árboles.$$

a) (1 punto) Utilice las reglas de derivación para hallar $A'(t)$.
b) (1,5 puntos) Determine a qué ritmo variaba el número de árboles de dicha comunidad cuatro años después de su fundación.
c) (1,5 puntos) Calcule $A'(10)$e interprete el resultado según el contexto del problema.

Solución:

a)

$$A'(t)=\left[16\left(\frac{3t^2-38t+170}{4t^2-50t+186}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=8\left(\frac{3t^2-38t+170}{4t^2-50t+186}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{3t^2-38t+170}{4t^2-50t+186}\right)'$$

$$¿8\left(\frac{3t^2-38t+170}{4t^2-50t+186}\right)^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{(6t-38)(4t^2-50t+186)-(3t^2-38t+170)(8t-50)}{(4t^2-50t+186)^2}\right]$$

b) $A'(4)\approx 1{,}36$
Después de 4 años de fundada la comunidad, el número de árboles aumenta a razón de 1,36 cientos de árboles por año (o 136 árboles por año) aproximadamente.

c) $A'(10)\approx -0{,}85$
Después de 10 años de fundada la comunidad, el número de árboles disminuye a razón de $0,85$ cientos de árboles por año (o 85 árboles por año) aproximadamente.

3. (3 puntos) Dada la función

$$f(x)=\sqrt{3x-2}$$

Halle $f'(2)$ mediante la definición de derivada.

Solución:

Por la definición de la derivada en un punto, se tiene:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

Hallamos el límite y se obtiene:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)}{(x-2)}\cdot\frac{(\sqrt{3x-2}+2)}{(\sqrt{3x-2}+2)}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}$$

$$Por\ lo\ tanto, f'(2)=\frac{3}{4}$$

4. (5 puntos) Dada la función

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+7x+6}{x+2} & , \quad x<-2 \\ Ax^3-2x+B & , \quad -2\le x\le 1 \\ 3x^2+Cx+4 & , \quad x>1\end{cases}$$

Halle los valores de las constantes A, B y C, sabiendo que f es derivable en $x=1$ y continua en $x=-2$.

Solución:

Como f es continua en $x=-2$, se tiene:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$$

$$\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{2x^2+7x+6}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2^+}\frac{|x+2|(2x+3)}{|x+2|}=-1$$

$$\to \lim_{x\to -2^-}\left(\frac{2x^2+7x+6}{x+2}\right)=\lim_{x\to -2^+}|Ax^3-2x+B|$$

$$-1=-8A+4+B$$
$$8A-B=5\cdots(1)$$

Como f es derivable en $x=1$, entonces es continua en $x=1$, es decir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}|Ax^3-2x+B|=\lim_{x\to 1^+}|3x^2+Cx+4|$$

$$A-2+B=3+C+4$$
$$\to A+B-C=9\cdots(2)$$

Además,

$$f'(x)=\begin{cases}2 & , \quad x<-2 \\ 3Ax^2-2 & , \quad -2\le x\le 1 \\ 2Cx & , \quad x>1\end{cases}$$

Como f es derivable en $x=1$, entonces:

$$f'$$
$$3A-2=6+C$$
$$\to 3A-C=8\cdots(3)$$

Finalmente, de las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

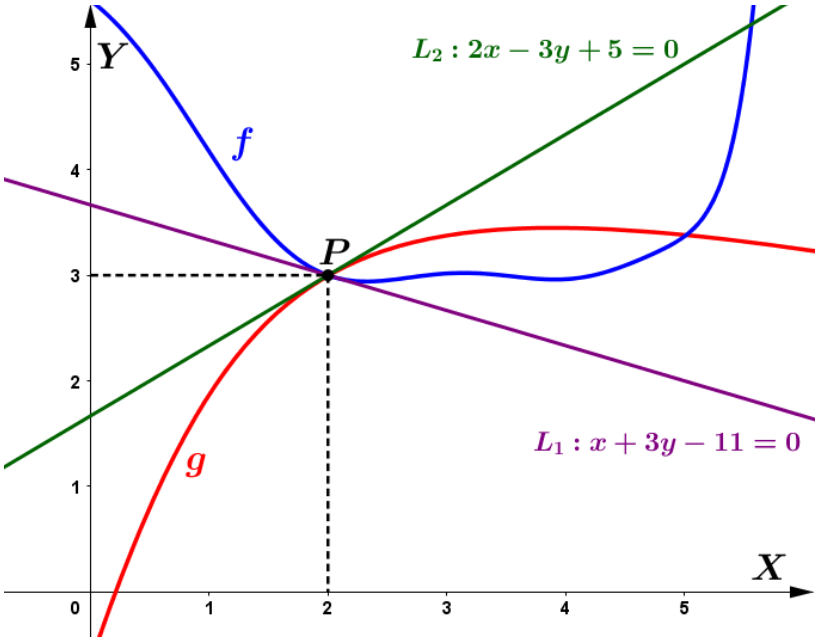
$$\begin{cases}8A-B+0C=5\\ A+B-C=9\\ 3A+0B-C=8\end{cases}$$

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

Al resolver el sistema de ecuaciones, se tiene que:

$$A=1, B=3, C=-5$$

5. (3 puntos) En la figura adjunta, las rectas $L_1: x+3y-11=0$ y $L_2: 2x-3y+5=0$ son tangentes a los gráficos de las funciones f y g en el punto $P(2;3)$, respectivamente. Si $h(x)=f(x)g(x)$, halle el valor de $h'(2)$.



Solución:

Como se pide $h'(2)$, derivamos la función h y se tiene:

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Al evaluar en $x=2$, tenemos:

$$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)\cdots(¿)$$

Sabemos que:

$$f(2)=3 \qquad \text{y} \qquad g(2)=3$$

Por otro lado,

$$L_1: x+3y-11=0 \rightarrow m_1=\frac{-1}{3}$$

Como L_1 es tangente a f en $P(2;3)$, se tiene que:

$$f'(2)=\frac{-1}{3}$$

Asimismo,

$$L_2: 2x-3y+5=0 \rightarrow m_2=\frac{2}{3}$$

Como L_2 es tangente a g en $P(2;3)$, se tiene que:

$$g'(2)=\frac{2}{3}$$

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)

Finalmente, al reemplazar en $(¿)$ los valores obtenidos, tenemos:

$$h'(2)=\left(\frac{-1}{3}\right)(3)+(3)\left(\frac{2}{3}\right)=1$$

Por lo tanto,

$$h'(2)=1$$

Los profesores del curso

Descargado por Alexis Abendaño (eterias29@gmail.com)